mathematica.gr

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015

Λύσεις
των
θεμάτων

Έκδοση 1η (20/05/2015, 21:00)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=133&t=49619

Συνεργάστηκαν οι:
Στράτης Αντωνέας, Ανδρέας Βαρβεράκης, Βασίλης Κακαβάς,
Γιώργης Καλαθάκης, Φωτεινή Καλδή, Σπύρος Καρδαμίτσης,
Νίκος Κατσίπης, Χρήστος Κυριαζής, Στάθης Κούτρας
Μίλτος Παπαγρηγοράκης, Λευτέρης Πρωτοπαπάς, Γιώργος Ρίζος,
Μπάμπης Στεργίου, Σωτήρης Στόγιας, Αλέξανδρος Συγκελάκης,
Κώστας Τηλέγραφος, Χρήστος Τσιφάκης

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2014

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x), x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν και $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$ είναι αντίστοιχα οι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε τον σταθμικό μέσο της μεταβλητής Χ.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta), f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα $\left(\alpha,\beta\right)$ για $x=x_0$.

β) Ένα τοπικό ελάχιστο μια συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

γ) Η διακύμανση των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

δ) Αν για τους συντελεστές μεταβολής των δειγμάτων Α και Β ισχύει $CV_B > CV_A$, τότε λέμε ότι το δείγμα Β εμφανίζει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το δείγμα Α.

ε) Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε η έκφραση «η πραγματοποίηση του Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του Β» δηλώνει ότι $A\subseteq B$.

Μονάδες 10

mathematica.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Απόδειξη σελίδα 31 σχολικού βιβλίου.

Α2. Ορισμός σελίδα 22 σχολικού βιβλίου.

Α3. Ορισμός σελίδα 86 σχολικού βιβλίου.

Α4. α) **Λ** (σελίδα 40 σχολικού βιβλίου).
β) **Σ** (σελίδα 14 σχολικού βιβλίου).
γ) **Λ** (σελίδα 95 σχολικού βιβλίου).
δ) **Λ** (σελίδα 97 σχολικού βιβλίου).
ε) **Σ** (σελίδα 141 σχολικού βιβλίου).

ΘΕΜΑ Β

Έστω Α, Β και Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Οι πιθανότητες των ενδεχομένων $A, A\cap B, A\cup B$ ανήκουν στο σύνολο των λύσεων της εξίσωσης

$$(3x-1)(8x^2-6x+1)=0.$$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ ανήκει στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης $9x^2-3x-2=0$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ και $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

Μονάδες 5

Β2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A'-B')$, καθώς επίσης και την πιθανότητα του ενδεχομένου Δ: «πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β».

Μονάδες 8

Β3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου
Ε: «πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β»

Μονάδες 6

Β4. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Β και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 6

ΔΙΕΥΚΡΙΝΗΣΗ: Οι πιθανότητες των ενδεχομένων $A, A\cap B, A\cup B$ **είναι** το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης.

ΛΥΣΗ:

Β1. $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow 3x-1=0$ ή $8x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ ή $x=\frac{1}{2}$ ή $x=\frac{1}{4}$.

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$ με $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$.

Όμως $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$ άρα $P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$ κι έτσι

$P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$, εφόσον (*) όλες οι ρίζες της εξίσωσης αντιστοιχούν στις πιθανότητες των ενδεχομένων.

(*) Σύμφωνα με τη διευκρίνιση που δόθηκε.

Β2. Επειδή $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, με αντικατάσταση έχουμε $P(B)=\frac{5}{12}$.

Λόγω της σχέσης $P(A-B)=P(A\cap B')$ έχουμε

$$P(A'-B')=P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}=\frac{1}{6}.$$

Επίσης $\Delta=(A\cap B)'$ κι έτσι

$$P(\Delta)=P\left((A\cap B)'\right)=1-P\left(A\cap B\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Β3. Είναι $E=(A-B)\cup(B-A)$.
Επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $B-A$ είναι ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε

$$P\left((A-B)\cup(B-A)\right)=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{5}{12}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Β4. $9x^2-3x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ ή $x=-\frac{1}{3}$.

Όμως $0\le P(\Gamma)\le 1$, άρα $P(\Gamma)=\frac{2}{3}$.

Αν τα B,Γ ήταν ασυμβίβαστα, τότε από τον απλό προσθετικό νόμο θα είχαμε

$$P(B\cup\Gamma)=P(B)+P(\Gamma)=\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=\frac{13}{12}>1,$$

που είναι άτοπο, διότι $0\le P(B\cup\Gamma)\le 1$. Άρα τα B,Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής Χ, τις οποίες ομαδοποιούμε σε 5 ισοπλατείς κλάσεις, όπως παρουσιάζονται στον **Πίνακα Ι**, όπου $f_i\%, i=1,2,3,4,5$ είναι οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό των αντιστοίχων κλάσεων.
Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Δίνεται ότι:

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3η κλάση είναι 108°.
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x}=14$.

Κλάσεις	$f_i\%$
[8 , 10)	
[10 , 12)	
[12 , 14)	
[14 , 16)	
[16 , 18)	

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f_1\%=10$, $f_2\%=10$, $f_3\%=30$, $f_4\%=20$, $f_5\%=30$. Δεν είναι απαραίτητο να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον **Πίνακα Ι** συμπληρωμένο.

Μονάδες 6

Γ2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.
Δίνεται $\sqrt{6,6}\simeq 2,57$

Μονάδες 7

Γ3. Έστω x_1,x_2,x_3 και x_4 τα κέντρα της 1ης, 2ης, 3ης και 4ης κλάσης αντίστοιχα και ν_1,ν_2,ν_3 και ν_4 οι συχνότητες της 1ης, 2ης, 3ης και 4ης κλάσης αντίστοιχα. Αν $\sum_{i=1}^{4} x_i\nu_i=1780$, να βρείτε το πλήθος ν των παρατηρήσεων του δείγματος.

Μονάδες 5

Γ4. Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ πέντε τυχαία επιλεγμένες παρατηρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους από το παραπάνω δείγμα ν παρατηρήσεων. Ορίζουμε ως $\bar{\alpha}$ τη μέση τιμή των πέντε αυτών παρατηρήσεων και S_α την τυπική τους απόκλιση.
Εάν $\beta_i=\dfrac{\alpha_i-\bar{\alpha}}{S_\alpha}$, για $i=1,2,3,4,5$, να δείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{\beta}$ του δείγματος $\beta_i, i=1,2,3,4,5$ είναι ίση με 0 και η τυπική του απόκλιση S_β είναι ίση με 1.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

Γ1. Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%, άρα $f_1\%=10$.
Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%, άρα $f_5\%=30$.
Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3η κλάση είναι 108°, άρα $\alpha_3=360^\circ\cdot f_3 \Leftrightarrow f_3=\dfrac{108^\circ}{360^\circ}=0,3$, δηλαδή $f_3\%=30$.
Έχουμε ότι $f_4=1-f_1-f_2-f_3-f_5=1-0,1-f_2-0,3-0,3=0,3-f_2$.
Τα κέντρα των κλάσεων είναι: $x_1=9, x_2=11, x_3=13, x_4=15, x_5=17$.

Επομένως,

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{5}x_i f_i \Leftrightarrow \ 14=9\cdot 0{,}1+11\cdot f_2+13\cdot 0{,}3+15(0{,}3-f_2)+17\cdot 0{,}3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14=0{,}9+11f_2+3{,}9+4{,}5-15f_2+5{,}1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4f_2=0{,}4 \Leftrightarrow f_2=0{,}1 \ \text{ και } \ f_4=0{,}3-0{,}1=0{,}2\,.$$

Επομένως, $f_2\%=10$ και $f_4\%=20$.

i	Κλάσεις	x_i	f_i	fi%	x_i f_i
1	**[8, 10)**	**9**	**0,1**	**10**	**0,9**
2	**[10, 12)**	**11**	**0,1**	**10**	**$11f_2$**
3	**[12, 14)**	**13**	**0,3**	**30**	**3,9**
4	**[14, 16)**	**15**	**0,2**	**20**	**$15f_4$**
5	**[16,18)**	**17**	**0,3**	**30**	**5,1**
–	Σύνολο	**–**	**1**	**100**	**–**

ΣΧΟΛΙΟ: Αν και δεν είναι απαραίτητος ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων, εντούτοις τον παραθέτουμε για να γίνει πιο εποπτικός ο τρόπος παρουσίασης των παραπάνω.

Γ2.

Είναι $s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\nu_i$ άρα $s^2=\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\frac{\nu_i}{\nu} \Leftrightarrow s^2=\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 f_i$.

Οπότε

$$s^2=\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2 f_i=(9-14)^2\cdot 0{,}1+(11-14)^2\cdot 0{,}1+(13-14)^2\cdot 0{,}3+(15-14)^2\cdot 0{,}2+(17-14)^2\cdot 0{,}3=$$

$$=2{,}5+0{,}9+0{,}3+0{,}2+2{,}7=6{,}6\,.$$

Η τυπική απόκλιση είναι: $s=\sqrt{6{,}6}\simeq 2{,}57$.

Ο συντελεστής μεταβολής είναι: $CV=\frac{s}{\bar{x}}\simeq\frac{2{,}57}{14}\simeq 0{,}187>0{,}1$, άρα το δείγμα των παρατηρήσεων δεν είναι ομοιογενές.

Γ3. Είναι

$$\sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i=1780 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4}x_i\frac{\nu_i}{\nu}=\frac{1780}{\nu} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4}x_i f_i=\frac{1780}{\nu} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5}x_i f_i=\frac{1780}{\nu}+x_5 f_5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}=\frac{1780}{\nu}+x_5 f_5 \Leftrightarrow 14=\frac{1780}{\nu}+17\cdot 0{,}3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1780}{\nu}=8{,}9 \Leftrightarrow \nu=\frac{1780}{8{,}9} \Leftrightarrow \nu=200\ .$$

Γ4. Για $i=1,2,3,4,5$ είναι $\beta_i=\dfrac{\alpha_i-\bar{\alpha}}{s_\alpha}=\dfrac{1}{s_\alpha}\cdot\alpha_i-\dfrac{\bar{\alpha}}{s_\alpha}$.

Έστω b_i οι παρατηρήσεις $b_i=\dfrac{1}{s_\alpha}\cdot\alpha_i$ και $\beta_i=b_i-\dfrac{\bar{\alpha}}{s_\alpha}$.

Σύμφωνα με εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, για τη μέση τιμή $\bar{b}$ και τυπική απόκλιση s_b των b_i και β_i ισχύει:

$$\bar{b}=\frac{1}{s_\alpha}\cdot\bar{\alpha}=\frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha} \quad \text{και} \quad s_b=\left|\frac{1}{s_\alpha}\right|s_\alpha=\frac{s_\alpha}{s_\alpha}=1,$$

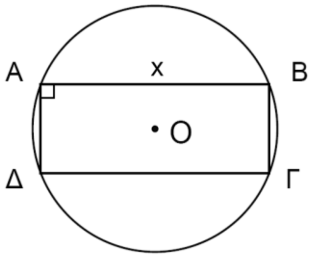
αφού το πηλίκο $\dfrac{\bar{\alpha}}{s_\alpha}$ είναι πραγματικός σταθερός αριθμός.

Όμοια για την εύρεση των $\bar{\beta}$ και s_β ισχύει:

$$\bar{\beta}=\bar{b}-\frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha}=\frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha}-\frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha}=0 \quad \text{και} \quad s_\beta=s_b=1.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται κύκλος (O,ρ) με κέντρο O και ακτίνα $\rho=5$ και ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά $AB=x$,όπως φαίνεται στο **Σχήμα Ι.**



ΣΧΗΜΑ Ι

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο $f(x)=x\cdot\sqrt{100-x^2}$, $0<x<10$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο. Για την τιμή αυτήν του x, δείξτε ότι το ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x}$.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Αν $P(A-B)>0$, να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right)\le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ:

Δ1. Το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο επομένως η γωνία $\hat{B}$ είναι ορθή άρα βαίνει σε ημικύκλιο. Δηλαδή η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου, άρα $ΑΓ = 2\rho = 10$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο επομένως από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 \Leftrightarrow ΒΓ^2 = ΑΓ^2 - ΑΒ^2 \Leftrightarrow ΒΓ^2 = 10^2 - x^2.$$

Επειδή $ΒΓ > 0$ και επιπλέον $x < 2\rho = 10$ (χορδή του κύκλου) έχουμε $ΒΓ = \sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι ίσο με: $(ΑΒΓΔ) = ΑΒ \cdot ΒΓ = x\sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$.

Επομένως η συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι η:

$$f(x) = x\sqrt{100 - x^2},\ 0 < x < 10.$$

Δ2. Η συνάρτηση $100 - x^2$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,10)$ ως πολυωνυμική.

Η συνάρτηση $\sqrt{100 - x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,10)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $\sqrt{x}$ (άρρητη) και $100 - x^2$ (πολυωνυμική).

Συνεπώς η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,10)$ ως γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\sqrt{100 - x^2}$ και x (πολυωνυμική), με

$$f'(x) = \left(x\sqrt{100 - x^2}\right)' = \sqrt{100 - x^2} + x\frac{\left(100 - x^2\right)'}{2\sqrt{100 - x^2}} =$$

$$= \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}},\ 0 < x < 10.$$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 100 - 2x^2 = 0 \\ 0 < x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 50 \\ 0 < x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} > 0 \\ 0 < x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100 - 2x^2 > 0 \\ 0 < x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 50 \\ 0 < x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < \sqrt{50} \\ 0 < x < 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5\sqrt{2} < x < 5\sqrt{2} \\ 0 < x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 5\sqrt{2}$$

και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 5\sqrt{2} < x < 10$.

Επομένως στο διάστημα $\left(0, 5\sqrt{2}\right]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ενώ στο $\left[5\sqrt{2}, 10\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο $x = 5\sqrt{2}$ παρουσιάζει μέγιστο το $f\left(5\sqrt{2}\right) = 5\sqrt{2}\sqrt{100 - \left(5\sqrt{2}\right)^2} = 50$.

Όταν $x = 5\sqrt{2}$ τότε και $ΒΓ = \sqrt{100 - \left(5\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Επομένως ΑΒ = ΒΓ, οπότε το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Δ3. Η συνάρτηση $f(1+x)$ ορίζεται αν και μόνο αν $0<1+x<10 \Leftrightarrow -1<x<9$.

Τώρα αν $g(x)=\dfrac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}$ ορίζεται αν και μόνο αν $\begin{cases} -1<x<9 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(0,9)$ επομένως έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου της στο μηδέν.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}=\dfrac{1}{98}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}=\dfrac{1}{98}f'(1)=\dfrac{1}{98}\dfrac{100-2}{\sqrt{100-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{99}}=\dfrac{\sqrt{99}}{99}$.

Δ4. Θα δείξουμε αρχικά ότι οι αριθμοί $\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}$, $\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}$ ανήκουν στο διάστημα $\left(0,5\sqrt{2}\right]$, στο οποίο η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Το ότι είναι θετικοί είναι προφανές.

Επιπλέον έχουμε ότι:

$$1\geq P(A)\geq P(A-B)>0 \Leftrightarrow -1\leq -P^2(A)<0 \Leftrightarrow 99\leq 100-P^2(A)<100 \Leftrightarrow \sqrt{99}\leq\sqrt{100-P^2(A)}<10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{99}}>\frac{1}{\sqrt{100-P^2(A)}}>\frac{1}{10} \overset{0<P(A-B)\leq 1}{\Leftrightarrow} \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\leq\frac{P(A-B)}{\sqrt{99}}\leq\frac{1}{\sqrt{99}}<5\sqrt{2}, \quad (1).$$

Με όμοιο τρόπο δείχνω ότι: $\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\leq 5\sqrt{2}$, (2).

Λόγω των (1), (2) και της μονοτονίας της συνάρτησης f αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\leq\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$P(A-B)\sqrt{100-P^2(A-B)}\leq P(A)\sqrt{100-P^2(A)}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$f\left(P(A-B)\right)\leq f\left(P(A)\right)$$

που ισχύει, καθώς $A-B\subseteq A$ άρα $P(A-B)\leq P(A)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,5\sqrt{2}\right]$.

(Οι αριθμοί P(A–B), P(A) ανήκουν στο διάστημα (0, 1) άρα και στο $\left(0,5\sqrt{2}\right]$).

ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

B2.

$P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=1-P(A)-P(A'\cap B')$.

Για τον υπολογισμό του $P(A'\cap B')$ αποδεικνύουμε ότι $A'\cap B'=(A\cup B)'$

Έστω $w\in A'\cap B' \Leftrightarrow (w\in A' \text{ και } w\in B') \Leftrightarrow (w\notin A \text{ και } w\notin B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w\notin (A\cup B) \Leftrightarrow w\in (A\cup B)'$, δηλαδή $A'\cup B'=(A\cap B)'$.

Είναι $P\left((A\cup B)'\right)=1-P(A\cup B)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$, οπότε είναι $P(A'-B')=1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$.

.

Γ1.

$$f_3=\frac{108}{360}=0,3.$$

Επειδή $f_1+f_2+f_3+f_4+f_5=1 \Rightarrow f_2+f_4=1-0,1-0,3-0,3=0,3 \Rightarrow 11f_2+11f_4=3,3$ (1)
και $0,1\cdot 9+f_2\cdot 11+0,3\cdot 13+f_4\cdot 15+0,3\cdot 17=14 \Rightarrow 11\cdot f_2+15\cdot f_4=4,1$ (2).
Αφαιρώντας από την (2) την (1), έχουμε: $4\cdot f_4=0,8 \Rightarrow f_4=0,2$.
Επομένως, $f_2=0,3-f_4=0,1$.

Γ2. Είναι $s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\nu_i$ άρα $s^2=\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\frac{\nu_i}{\nu} \Leftrightarrow s^2=\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 f_i$

$\Leftrightarrow s^2=(9-14)^2\cdot 0,1+(11-14)^2\cdot 0,1+(13-14)^2\cdot 0,3+(15-14)^2\cdot 0,2+(17-14)^2\cdot 0,3$

$\Leftrightarrow s^2=25\cdot 0,1+9\cdot 0,1+0,3+0,2+9\cdot 0,3 \Leftrightarrow s^2=6,6$.

Άρα $s=\sqrt{6,6}\cong 2,57$.

Είναι $CV=\frac{s}{|\bar{x}|}$ άρα $CV=\frac{2,57}{14}\cong 0,18357>0,1$, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3.

Από τον τύπο $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i\nu_i}{\nu}$ έχουμε διαδοχικά:

$$14=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i+x_5\nu_5}{\nu} \Leftrightarrow 14=\frac{1780+17\nu_5}{\nu} \Leftrightarrow 1780+17\nu_5=14\nu \ (1).$$

Όμως $f_5=\frac{\nu_5}{\nu} \Leftrightarrow \nu_5=0,3\nu$ και αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε:

$$1780+17\cdot 0,3\nu=14\nu \Leftrightarrow 8,9\nu=1780 \Leftrightarrow \nu=200.$$

Γ4.

Είναι $\bar{\alpha}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}{5} \Leftrightarrow \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5-5\bar{\alpha}=0$.

$$\bar{\beta}=\frac{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5}{5}=\frac{\frac{\alpha_1-\bar{\alpha}}{S_\alpha}+\ldots+\frac{\alpha_5-\bar{\alpha}}{S_\alpha}}{5}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5-5\bar{\alpha}}{5S_\alpha}=0.$$

Είναι $\left(\alpha_i-\bar{\alpha}\right)^2=\beta_i{}^2S_\alpha{}^2$.

Έχουμε ότι

$$S_\alpha^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(\alpha_i-\bar{\alpha})^2=\frac{1}{5}\left[(\alpha_1-\bar{\alpha})^2+(\alpha_2-\bar{\alpha})^2+(\alpha_3-\bar{\alpha})^2+(\alpha_4-\bar{\alpha})^2+(\alpha_5-\bar{\alpha})^2\right],$$

άρα

$$S_\alpha^2=\frac{\beta_1^2S_\alpha^2+\beta_2^2S_\alpha^2+\beta_3^2S_\alpha^2+\beta_4^2S_\alpha^2+\beta_5^2S_\alpha^2}{5} \Leftrightarrow S_\alpha^2=\frac{S_\alpha^2(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\beta_4^2+\beta_5^2)}{5} \Leftrightarrow$$

$$S_\alpha{}^2=\frac{\beta_1{}^2S_\alpha{}^2+\ldots+\beta_5{}^2S_\alpha{}^2}{5} \Leftrightarrow \frac{\beta_1{}^2+\ldots+\beta_5{}^2}{5}=1 \overset{\bar{\beta}=0}{\Leftrightarrow} S_\beta{}^2=1 \Leftrightarrow S_\beta=1.$$

Γ4.

$$S_\alpha{}^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(\alpha_i-\overline{\alpha})^2 .$$

$$\overline{\beta}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\frac{\alpha_i-\overline{\alpha}}{S_\alpha}=\frac{1}{5}\frac{\sum_{i=1}^{5}\alpha_i-5\overline{\alpha}}{S_\alpha}=0 .$$

$$S_\beta{}^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(\beta_i-\overline{\beta})^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(\beta_i)^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(\frac{\alpha_i-\overline{\alpha}}{S_\alpha})^2=1 .$$

Δ3.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}-\sqrt{99}}{98x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left((1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}-\sqrt{99}\right)\left((1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}\right)}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left((1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}\right)^2-\left(\sqrt{99}\right)^2}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}\right]}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^2\left(100-(1+x)^2\right)-99}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-x^2}+\sqrt{99}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{100(1+x)^2-(1+x)^4-99}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-x^2}+\sqrt{99}\right]}=\lim_{x\to0}\frac{100(1+2x+x^2)-(1+2x+x^2)(1+2x+x^2)-99}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-x^2}+\sqrt{99}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{100(1+2x+x^2)-(1+2x+x^2+2x+4x^2+2x^3+x^2+2x^3+x^4)-99}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-x^2}+\sqrt{99}\right]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{100(1+2x+x^2)-(1+4x+6x^2+4x^3+x^4)-99}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-x^2}+\sqrt{99}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{100+200x+100x^2-1-4x-6x^2-4x^3-x^4-99}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-x^2}+\sqrt{99}\right]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{196x+94x^2-4x^3-x^4}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-x^2}+\sqrt{99}\right]}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(196+94x-4x^2-x^3\right)}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-x^2}+\sqrt{99}\right]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(196+94x-4x^2-x^3\right)}{98\left[(1+x)\sqrt{100-x^2}+\sqrt{99}\right]}=\frac{196}{98(2\sqrt{99})}=\frac{1}{\sqrt{99}} .$$

Δ3. Επειδή για τις συναρτήσεις $f\left(1+x\right)-\sqrt{99}$ και 98x ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος De L' Hospital, έχουμε

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)\sqrt{100-\left(1+x\right)^2}-\sqrt{99}}{98x}\overset{\binom{0}{0}}{\underset{D'LH}{=}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{100-\left(1+x\right)^2}-\frac{2(1+x)}{2\sqrt{100-\left(1+x\right)^2}}}{98}=\frac{\sqrt{99}-\frac{1}{\sqrt{99}}}{98}=\frac{\frac{99-1}{\sqrt{99}}}{98}=\frac{1}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}.$$

Δ3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}-\sqrt{99}}{98x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{100-(1+x)^2}-\sqrt{99}}{98x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x\cdot\sqrt{100-(1+x)^2}}{98x}+\frac{\sqrt{100-(1+x)^2}-\sqrt{99}}{98x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{100-(1+x)^2}}{98}+\frac{100-(1+x)^2-99}{98x\cdot(\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99})}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{100-(1+x)^2}}{98}-\frac{2+x}{98\cdot(\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99})}\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{99}}{98}-\frac{1}{98\cdot\sqrt{99}}=\frac{1}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}.$$

Δ3. Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x}\overset{u=1+x,x\to 0\Rightarrow u\to 1}{=}\lim_{u\to 1}\frac{u\sqrt{100-u^2}-\sqrt{99}}{98\cdot(u-1)}=$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{\left[u\sqrt{100-u^2}-\sqrt{99}\right]\cdot\left[u\sqrt{100-u^2}+\sqrt{99}\right]}{98\cdot(u-1)\cdot\left[u\sqrt{100-u^2}+\sqrt{99}\right]}=$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{\left(u\sqrt{100-u^2}\right)^2-\left(\sqrt{99}\right)^2}{98\cdot(u-1)\cdot\left[u\sqrt{100-u^2}+\sqrt{99}\right]}=$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{u^2\left(100-u^2\right)-99}{98\cdot(u-1)\cdot\left[u\sqrt{100-u^2}+\sqrt{99}\right]}=$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{-u^4+100u^2-99}{98\cdot(u-1)\cdot\left[u\sqrt{100-u^2}+\sqrt{99}\right]}$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{-\left(u^2-1\right)\left(u^2-99\right)}{98\cdot(u-1)\cdot\left[u\sqrt{100-u^2}+\sqrt{99}\right]}$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{-(u-1)(u+1)\left(u^2-99\right)}{98\cdot(u-1)\cdot\left[u\sqrt{100-u^2}+\sqrt{99}\right]}$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{-(u+1)\left(u^2-99\right)}{98\cdot\left[u\sqrt{100-u^2}+\sqrt{99}\right]}=\frac{2\cdot 98}{98\cdot 2\sqrt{99}}=\frac{1}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}.$$

ΣΧΟΛΙΟ: Οι λύσεις αυτές (με αντικατάσταση ή με χρήση του Θεωρήματος De L' Hospital) είναι εκτός του πνεύματος των μαθηματικών Γενικής Παιδείας ωστόσο είναι γνώσεις διδαγμένες στη μερίδα των μαθητών της Γ Λυκείου που ακολουθούν Τεχνολογική ή Θετική Κατεύθυνση, επομένως επιστημονικά τεκμηριωμένες άρα αποδεκτές λύσεις.

Δ4.

Είναι $0<\frac{P(A-B)P(A)}{f(P(A))}\le\frac{P(A)}{f(P(A))}=\frac{1}{\sqrt{100-P^2(A)}}\le\frac{1}{\sqrt{99}}<5\sqrt{2}$ και ομοίως $0<\frac{P(A-B)P(A)}{f(P(A-B))}\le\frac{1}{\sqrt{99}}<5\sqrt{2}$.

Οπότε, αφού f γνησίως αύξουσα στο $\left(0,5\sqrt{2}\right]$, έχουμε διαδοχικά

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right)\le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{P(A-B)\cdot P(A)}{f(P(A))}\right)\le f\left(\frac{P(A-B)\cdot P(A)}{f(P(A-B))}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{P(A-B)\cdot P(A)}{f(P(A))}\le\frac{P(A-B)\cdot P(A)}{f(P(A-B))}\Leftrightarrow f(P(A))\ge f(P(A-B))\Leftrightarrow P(A)\ge P(A-B),$$

που ισχύει, αφού $A-B\subseteq A$.